

۱- کدامیک از گزاره های زیر با $p \leftrightarrow q$ هم ارز است؟

الف- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ب- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

ج- $\sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ د- $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

۲- کدامیک از گزاره های زیر یک راستگو است؟

الف- $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ب- $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

ج- $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ د- هر سه گزاره راستگو هستند.

۳- کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

الف- $\exists x [p(x) \vee q(x)] \rightarrow [\exists x p(x) \vee \exists x q(x)]$ ب- $\exists x [p(x) \wedge q(x)] \leftrightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$

ج- $\forall x [p(x) \vee q(x)] \leftrightarrow [\forall x p(x) \vee \forall x q(x)]$ د- هیچکدام

۴- برای سه گزاره p ، q و r کدام گزینه صحیح است؟

الف- $\neg(p \wedge q) = \neg p \wedge \neg q$ ب- $\neg(\neg p \wedge \neg q) = p \vee q$

ج- $q = p \vee (p \wedge q)$ د- $q = p \wedge (p \wedge q)$

۵- اگر رابطه هم ارزی $R \subseteq A * A$ برای $A = \{1,2,3,5,7,11,12\}$ به صورت زیر تعریف شود دسته هم ارزی [3] کدام است؟

$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{4}$

الف- $\{3,4,8\}$ ب- $\{3,7,11\}$ ج- $\{3\}$ د- $\{1,2,5,12\}$

۶- فرض کنید که $A = Z^+$ و رابطه R در A به صورت زیر تعریف شده است: $aRb \Leftrightarrow GCD(a,b) = 1$

رابطه R کدام یک از مجموعه خواص زیر را دارد؟ (GCD به معنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

الف- متقارن، متعدی و بازتابی ب- متقارن، ضد متقارن و ضد بازتابی

ج- متقارن د- متقارن و ضد متقارن و متعدی

۷- هر گاه M_R به عنوان ماتریس رابطه R باشد کدام یک از روابط زیر باید برقرار باشد تا رابطه R دارای خاصیت متعدی

باشد؟

الف- $M_R = M_R^t$ ب- $(M_R)_{\emptyset}^2 \leq M_R$ ج- $(M_R)^t = M_R$ د- $(M_R)_{\emptyset}^2 \geq I$

۸- فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه در A باشند کدام گزینه صحیح است؟

الف- اگر R_1 و R_2 ضد بازتابی باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز ضد بازتابی است.

ب- اگر R_1 و R_2 متقارن باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز متقارن است.

ج- اگر R_1 و R_2 ضد متقارن باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز ضد متقارن است.

د- اگر R_1 و R_2 بازتابی باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز بازتابی است.

۹- اگر S و R دو رابطه هم ارزی در A باشند، آنگاه کدامیک از روابط زیر هم ارزی است؟

الف- $R \cup S$ ب- $R \cap S$ ج- $R - S$ د- هر سه گزینه هم ارزی است.

۱۰- حداقل چند عدد از میان اعداد ۱ الی ۸ انتخاب کنید که دو عدد یافت شود تا جمع آنها برابر ۹ شود.

الف- ۷ ب- ۶ ج- ۵ د- ۴

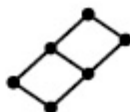
۱۱- ۴۲ دانش آموز از ۱۲ کامپیوتر بصورت اشتراکی استفاده می کنند. و هر دانش آموز حق استفاده از یک کامپیوتر را دارد و یک کامپیوتر نمی تواند به بیش از ۶ دانش آموز خدمات بدهد، حداقل چند کامپیوتر بوسیله ۳ نفر یا بیشتر استفاده خواهد شد؟

- الف- ۳ ب- ۴ ج- ۵ د- ۶

۱۲- کدامیک از روابط زیر، ترتیب جزئی است؟

- الف- بخش پذیری ب- زیر مجموعه ج- کوچکتر مساوی معمولی د- هر سه رابطه

۱۳- نمودار هاس زیر دارای چند ترتیب توپولوژیکی می باشد؟



- الف- ۵ ب- ۶

- ج- ۴ د- ۷

۱۴- برای مجموعه با ترتیب جزئی $(Z^+, |)$ کدام گزینه صحیح است؟ (LCM بمعنای کم م و GCD بمعنای ب م م)

- الف- $\begin{cases} a \wedge b = LCM(a, b) \\ a \vee b = GCD(a, b) \end{cases}$ ب- $\begin{cases} a \wedge b = LCM(a, b) \\ a \vee b = GCD(a, b) \end{cases}$

ج- گزینه الف صحیح است اگر $(Z^+, |)$ شبکه جبر بول باشد. د- گزینه ب صحیح است اگر $(Z^+, |)$ شبکه جبر بول باشد.

۱۵- برای مجموعه با ترتیب جزئی $(2^A, \subseteq)$ کدام گزینه صحیح است؟

- الف- $\begin{cases} A \vee B = A \cap B \\ A \wedge B = A \cup B \end{cases}$ ب- $\begin{cases} A \vee B = A \cup B \\ A \wedge B = A \cap B \end{cases}$

- ج- گزینه الف صحیح است اگر $|A| = 2k$ د- گزینه ب صحیح است اگر $|A| = 2k$

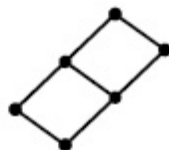
۱۶- کدامیک از شبکه های زیر پخش ناپذیر است؟



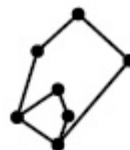
شبکه چهارم



شبکه سوم



شبکه دوم



شبکه اول

- الف- هر چهار تا ب- اول، دوم و سوم ج- دوم، سوم و چهارم د- اول، سوم و چهارم

۱۷- کدامیک از شبکه های موجود در سوال قبل مکمل پذیر بوده و مکمل ها منحصر بفرد هستند؟

- الف- هر چهار تا ب- اول، دوم و سوم ج- اول، سوم و چهارم د- هیچکدام

۱۸- اگر $(D_n, |)$ مجموعه مقسوم علیه های عدد n و رابطه بخش پذیری باشد، به ازای کدامیک از مقادیر n شبکه مربوطه جبر بول است؟

- الف- ۶، ۲۵ و ۴۵ ب- ۴۲، ۱۰، ۴۵ و ۴۲ ج- ۶، ۲۵، ۴۲ د- بستگی به مقدار n ندارد.

۱۹- بوسیله کدام یک از مجموعه دریچه های زیر وبدون استفاده از سایر دریچه ها می توان یک عبارت بولی را به صورت نمودار منطقی تشکیل داد؟

- الف- $\{AND, OR\}$ ، $\{NOR\}$ ، $\{NAND\}$ ، $\{NOT, AND\}$

- ب- $\{AND, OR\}$ ، $\{NOR\}$ ، $\{NAND\}$ ، $\{NOT, OR\}$

- ج- $\{NOT, AND\}$ ، $\{NOR\}$ ، $\{NAND\}$ ، $\{NOT, OR\}$

- د- $\{NOR, NAND\}$ ، $\{AND, OR\}$

۲۰- در مسئله برجهای هانوی برای n حلقه ($n \geq 2$)، تعداد نقل و انتقالات حلقه ها کدام است؟

الف - $a_n = 2a_{n-1} + 2$

ب - $a_n = 2a_{n-1} + 1$

د - $a_n = 3a_{n-1} + 2$

ج - $a_n = 2a_{n-1} - 1$

۲۱- n امین عدد کاتالان، $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ، برای کدامیک از روابط بازگشتی زیر تعریف می شود؟

ب - $C_n = \frac{2(2n+1)}{n+1} C_{n-1}$

الف - $C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$

د - $C_n = \frac{2(2n+1)}{n} C_{n-1}$

ج - $C_n = \frac{2(2n-2)}{n} C_{n-1}$

۲۲- کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

الف- گراف بدون جهت $G=(V,E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر، رأسی از درجه فرد نداشته باشد.

ب- گراف بدون جهت $G=(V,E)$ دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر، همبند بوده و حداقل دارای دو رأس از درجه فرد باشد.

ج- گراف بدون جهت $G=(V,E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر، رأسی از درجه زوج نداشته باشد.

د- گراف بدون جهت $G=(V,E)$ دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر، همبند بوده و حداقل دارای دو رأس از درجه زوج باشد.

۲۳- تعداد حلقه های هامیلتونی که هیچ یال مشترکی ندارند در گراف کامل K_n برای $n \geq 3$ و n فرد برابر است با:

الف - $\frac{n+1}{2}$

ب - $\frac{n-1}{2}$

ج - $\frac{n}{2}$

د - n

۲۴- کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

مورد اول- مکمل یک گراف $K_{m,n}$ ، گرافی با دو مولفه اتصال K_m و K_n است.

مورد دوم- برای گراف بدون حلقه و جهت $G=(V,E)$ و $|V|=n \geq 3$ ، اگر برای همه $x, y \in V$ که مجاور نمی باشند، شرط

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n+1$$

برقرار باشد، آنگاه G دارای مسیرهامیلتونی است.

مورد سوم- هر حلقه بطول فرد یک گراف دو بخشی نمی باشد.

الف. موارد دوم و سوم ب. موارد اول، سوم ج. موارد اول و دوم و سوم د. موارد اول و دوم

۲۵- اگر گراف G یک حلقه با n رأس باشد، G خود مکمل است اگر و تنها اگر n برابر باشد با:

الف - ۸

ب - ۷

ج - ۶

د - ۵

۲۶- اگر گراف $K_{m,12}$ دارای ۷۲ یال باشد آنگاه m چند است؟

الف - ۹

ب - ۸

ج - ۷

د - ۶

۲۷- اگر گراف G همبند و هامنی (مسطح) باشد و $|V|=v$ و $|E|=e$ و تعداد نواحی گراف در صفحه برابر r باشد آنگاه

الف - $e - v + r = 2$

ب - $v - e + r = 2$

ج - $r + e - v = 2$

د - $v - e - r = 2$

۲۸- تعداد درخت های پوشای بدون برجسب گراف زیر، چقدر است؟

الف. ۸

ب. ۱۶

ج. ۱۴

د. هیچکدام



۱- متن زیر در طی بازجویی از متهمان به قتل بدست آمده است:

- اگر قتل در شب اتفاق افتاده باشد یا مقتول در روز قبل در تهران بوده باشد، آنگاه کامران قاتل است.

- اگر قتل در شب اتفاق افتاده باشد و کامران قاتل باشد، آنگاه قتل با همکاری همسر مقتول صورت نگرفته است.

- اگر قتل در روز اتفاق افتاده باشد، آنگاه مقتول نهار را با همسرش خورده است.

- اگر مقتول در روز قبل در تهران بوده باشد، آنگاه قتل با همکاری همسر مقتول صورت گرفته است.

همچنین نتایج پزشکی قانونی به همراه سایر دلایل نشان می دهد که مقتول با ضربه جسم سختی به حفره شکم روبرو شده

است و نهار را با همسرش نخورده است و مقتول صبحانه را با کامران خورده است.

موارد زیر را از طریق قواعد استنتاج اثبات یا رد کنید.

الف- آیا کامران قاتل است؟

ب- آیا همسر مقتول در قتل مشارکت داشته؟

ج- آیا مقتول در روز قبل در تهران بوده؟

۲- رابطه هم ارزی $R \subseteq A^p \times A^p$ زیر تعریف شده است برای $A = \{1, 2, 3, 4\}$ دسته های (کلاس های) هم ارزی را بدست آورید.

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$$

۳- برای مشبکه ها رابطه زیر را اثبات کنید.

$$a \vee (b \vee C) = (a \vee b) \vee C$$

۴- برای سری فیبوناچی روابط زیر را اثبات کنید.

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1 \quad \text{الف} \quad \sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} \quad \text{ب}$$

۵- رابطه بازگشتی زیر را به روش جایگذاری (تکرار) حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1 & n \geq 2, n = 2^m \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

۶- برای عبارت محاسباتی زیر ابتدا درخت مربوط به آن را رسم کرده و سپس پیمایش های پس ترتیب و پیش ترتیب را برای

$$(x+y*z/k-e)*f*g/h*(i-j)$$

آن بنویسید.

۷- خاصیت های الف، ب و ج را برای هر یک از گرافهای G_1, G_2, G_3, G_4 مشخص کنید.

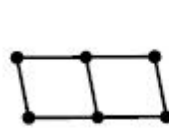
الف- دوبخشی است؟ ب- دارای مدار اولری است؟ ج- دارای دور هامیلتونی است؟



G_4



G_3



G_2



G_1

1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
13	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
20	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
22	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
26	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
27	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
28	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
29	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

جواب سوال درم: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d$; $R \subseteq A^2 \times A^2$; $A = \{1,2,3,4\}$

$$[(1,1)]_R = \{(1,1)\}$$

$$[(2,1)]_R = \{(2,1), (2,1)\}$$

$$[(2,2)]_R = \{(2,2), (3,1), (1,3)\}$$

$$[(3,2)]_R = \{(3,2), (2,3), (4,1), (4,1)\}$$

$$[(3,3)]_R = \{(3,3), (4,2), (2,4)\}$$

$$[(4,3)]_R = \{(4,3), (3,4)\}$$

$$[(4,4)]_R = \{(4,4)\}$$

کلاس های هم ارز همبند:

برفتمتاز سوال ۴۵ صنف ۱۵۶ کتاب

جواب سوال سوم: بر اساس قضیه ۳-۱۵ صفحه ۱۳۶ و ۱۳۵ کتاب.

از تعریف LUB داریم: $bvc \leq av(bvc)$ و $a \leq av(bvc)$
 از طرف دیگر $bvc \leq c$ و $c \leq av(bvc)$ می باشد بنابراین با توجه به خاصیت متعدی بودن داریم:

$$c \leq av(bvc) \text{ و } b \leq av(bvc)$$

بدین ترتیب $av(bvc)$ یک کران بالای a و b است در نتیجه طبق تعریف کوچکترین کران

$$\text{بالای داریم: } avb \leq av(bvc)$$

بدین ترتیب $av(bvc)$ یک کران بالای برای avb و c است و بنابراین

$$(avb)vc \leq av(bvc)$$

$$av(bvc) \leq (avb)vc \text{ و به طریق مشابه}$$

و سرانجام با توجه به خاصیت ضدتقارنی رابطه \leq خواهیم داشت:

$$av(bvc) = (avb)vc$$

الف

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 \\ F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

از طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم در نتیجه خواهیم دید که همه سهاها منسوخ میشوند و

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1$$

البته می دانیم $\left. \begin{matrix} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{matrix} \right\}$ است.

جواب سوال چهارم: بر اساس تمرین ۲۷ صفحه ۲۳۹ کتاب.

الف) می توان سری فیبوناچی را به صورت زیر نوشت:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \quad n \geq 0$$

ب) می توان سری فیبوناچی را به صورت زیر نیز برای هر $n \geq 1$ نوشت:

$$F_{2i-1} = F_{2i} - F_{2i-2}$$

و بدین ترتیب مشابه الف داریم:

$$F_1 = F_2 - F_0$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

\vdots

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

از طرفین معادلات را با هم جمع می کنیم.

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

جواب سوال پنجم، بر اساس مثال ۵-۱۳ صفحه ۲۵۷ و ۲۵۸ حساب

$$a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1$$

$$= 2(2a_{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2} - 1) + n - 1$$

$$= 2(2(2a_{\frac{n}{8}} + \frac{n}{4} - 1) + \frac{n}{2} - 1) + n - 1$$

⋮

$$= 2(2(2(\dots(2a_{\frac{n}{2^m}} + \frac{n}{2^{m-1}} - 1) + \frac{n}{2^{m-2}} - 1) + \dots) + \frac{n}{2} - 1) + n - 1$$

$$= 2^m a_{\frac{n}{2^m}} + n - 2^{m-1} + \dots + n - 2 + n - 2^0 = 2^m a_1 + mn - (2^m - 1) = mn - n + 1$$

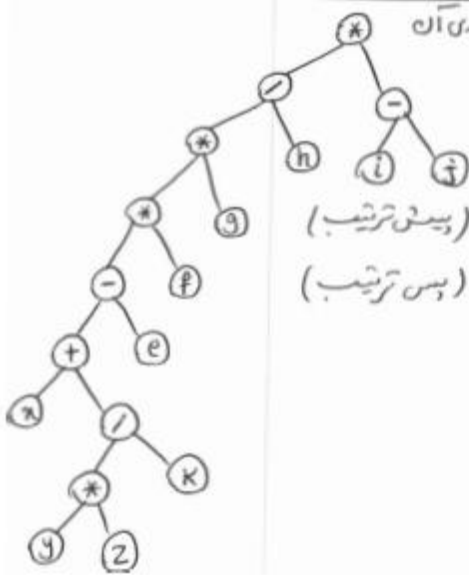
$$a_n = n \log_2 n - n + 1 \quad \leftarrow m = \log_2 n \quad \leftarrow n = 2^m$$

جواب سوال ششم، بر اساس مثال صفحه ۲۱۷ و مطالب بعدی آن

inorder: $(n+y * z / k - e) * f * g / h * (i - j)$

preorder: $* / * * - + x / * y z k e f g h - i j$ (پیش ترتیب)

postorder: $x y z * k / + e - f * g * h / i j - *$ (پس ترتیب)



جواب سوال هفتم: معادیم شخصی حاصل $\frac{y}{x}$
 گراف 6: دو بخش نیست و همین طور دارای مدار اولری نیست ولی دارای دور هامیلتونی می باشد.
 گراف 7: دو بخش می باشد و همین طور دارای مدار اولری نیست ولی دارای دور هامیلتونی می باشد.
 گراف 8: دو بخش می باشد و همین طور دارای مدار اولری می باشد و Δ دارای دور هامیلتونی می باشد.
 گراف 9: دو بخش نمی باشد و همین ملودر دارای مدار اولری نیز نیست ولی دارای دور هامیلتونی می باشد.

جواب سوال هشتم: بر اساس تمرین 73 صفحه 251 کتاب
 این گره دوازده نفری که هر نفر در آن شش نفر را می شناسد یک گراف با 12 گره در نظر گرفتیم که درجه هر گره آن برابر 6 باشد. بر اساس قضیه شخصی دور هامیلتونی می یابیم نتیجه شده از آن می توان گفت که این گراف دارای دور هامیلتونی خواهد بود یعنی می توانند افرادی که گره های آن را می شناسند یکدیگر را بشناسند و تشکیل یک دور را بدهند.

قضیه: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با $|V| = n \geq 3$ است. اگر برای هر رأس $v \in V$ $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ داشته باشیم، آنگاه G دارای دور هامیلتونی می باشد.
 رابطه دیگر عبارت از n و $\frac{n}{2}$ رابطه $\deg(v) + \deg(w) \geq \frac{n}{2}$ برقرار است آنگاه G دارای دور هامیلتونی می باشد.

در گراف مورد نظر این سوال درجه هر گره برابر 6 می باشد (یعنی هر فرد شش نفر را می شناسد، فرد یک گره است و رابطه آشنایی یک یا ل خواهد بود) پس

$$\deg(n) + \deg(y) = 6 + 6 \geq 12$$

رابطه برقرار است

و چون رابطه برقرار است بر اساس قضیه 6-5، این افراد می توانند دوری را تشکیل دهند و یکدیگر را بشناسند.